ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ   14/03/2019

ΑΣΚΗΣΗ 1

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ Κριτήριο Συμπύκνωσης: $\sum a_k$ συγκλίνει αν-αν $\sum 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{1+\frac{1}{2^k}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{k}{2^k}}}$$

$$2^k \frac{1}{(2^k)^{1+\frac{1}{2^k}}} = \frac{2^k}{2^k \cdot (2^k)^{\frac{1}{2^k}}} = \frac{1}{2^k (2^k)^{1/2^k}} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2^k}}} \xrightarrow{k \to \infty} 1 \neq 0$$

$\frac{n}{2^n} \xrightarrow{k \to \infty} 0$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{k}{2^k}}}$ αποκλίνει

$\Rightarrow 2^{\frac{k}{2^k}} \xrightarrow{\infty} 1$

$\xrightarrow[\text{Συμπύκνωσης}]{\text{Κρ.}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ αποκλίνει

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2^x} \overset{\text{Del hospital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2^k} = 0$$

{ Όχι Delhospital σε ακολουθίες. Μπορώ να κάνω σε συναρτήσεις και μετά να πω ότι πάει σε ακολουθίες }

2) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{1/k})$

(Βάζω για $\frac{1}{n} = n$) $\lim \frac{1-e^{-x}}{x} \overset{\text{Del hospital}}{=} \lim_{x \to 0} e^{-x} = 1$

$\to \lim \dfrac{1-e^{-1/k}}{1/k} = 1$

$\xrightarrow[\text{σύγκρισης } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ αποκλίνει}]{\text{οριακό κριτ}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} (1-e^{-1/k})$ Αποκλίνει

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\ln(1+1/k)}$

$\dfrac{1}{k\ln(1+1/k)} = \dfrac{1}{\ln[(1+1/k)]^k} \xrightarrow{k\to\infty} \dfrac{1}{\ln e} = 1 \neq 0$

Άρα, από κριτήριο απόκλισης, αποκλίνει

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin 1/k}{1/k} = 1}$

$\dfrac{\frac{1}{\sqrt{k}} \sin(1/k)}{1/k^{3/2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$

$\xrightarrow[\text{σύγκρισης } \sum \frac{1}{k^{3/2}} \text{ συγκλίνει}]{\text{οριακό κριτ}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$ συγκλίνει

5) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$ $\qquad \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \dfrac{1}{(\ln(2^k))^{\ln(2^k)}}$

$= \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{2^k}{(k\ln 2)^{k\ln 2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{2^k}{k^{k\ln 2}[(\ln 2)^{\ln 2}]^k}$

$= \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\alpha^k}{k^{k\ln 2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\alpha^k}{(k^{\ln 2})^k}$ $\qquad \left(\alpha = \dfrac{2}{(\ln 2)^{\ln 2}}\right)$

$= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\dfrac{\alpha}{k^{\ln 2}}\right)^k$

$\sqrt[k]{\left(\dfrac{\alpha}{k^{\ln 2}}\right)^k} = \dfrac{\alpha}{k^{\ln 2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$ $\xrightarrow[\text{ρίζας}]{\text{κριτ.}}$ Συγκλίνει

6) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}+1}{k^{3/2}-1}$

$$\frac{\frac{\sqrt{k}+1}{k^{3/2}-1}}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\xRightarrow{\sum 1/k}$ αποκλίνει

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

$$\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{\frac{k!\,\cancel{(k+1)}}{(k+1)^k\,\cancel{(k+1)}}}{\frac{k!}{k^k}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1$$

$\Rightarrow$ Η σειρά συγκλίνει

~~8)~~ $\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k}$

$\cancel{0 \le \sqrt[k]{k}-1 \xrightarrow{n\to\infty} 0}$

~~⇒ ∃ $k_0 \in \mathbb{N}$ τω (για ε = 1/2)~~

$\forall k \ge k_0 \ \sqrt[k]{k}$

8) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$

$$0 \le \sqrt[k]{k}-1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ τω (για $\varepsilon = 1/2$)

$\forall k \ge k_0 \quad \sqrt[k]{k} - 1 < 1/2$

$\Rightarrow \forall k \ge k_0 \quad 0 < (\sqrt[k]{k}-1)^k < (1/2)^k$

κριτήριο συγκρίσης $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$ συγκλίνει

$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$ συγκλίνει

9) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+2-k}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})}$

$\frac{\frac{2}{\sqrt{k}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})}}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \quad \frac{\text{ορ. κριτ. Συγκρ.}}{\sum \frac{1}{k} \text{ αποκλίνει}}$ Αποκλίνει

10) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$

$\sqrt[k]{(1+1/k)^{-k^2}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{k^2}{k}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$

$\xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1$ Συγκλίνει

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u> $a_k, b_k \geq 0$ $k \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

<u>Λύση:</u> $b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \{b_k\}$ φραγμένη $\Rightarrow$

$\exists M>0$ τ.ω $n \in \mathbb{N}$ να ισχυει

$0 \leq b_k \leq M \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq a_k b_k \leq M a_k$

$\xrightarrow[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει}]{\text{κριτ. Συγκ.}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

ισχυει το ίδιο αν $a_k b_k$ δεν είναι απαραίτητα ≥ 0? ΟΧΙ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $a_k = b_k = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει από κριτήριο Leibniz

(γιατί $1/\sqrt{k} \to 0$ η $\{\frac{1}{\sqrt{k}}\}$ φθίνουσα)

$\Rightarrow \sum a_k$, $\sum b_k$ συγκλίνουν

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει

ΑΣΚΗΣΗ 4

$a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\exists$ $\{a_{n_k}\}$ υπακολουθία της $\{a_k\}$ τω $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ να συγκλίνει

Λύση $a_k \to 0$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ \exists n_\varepsilon$ τ.ω $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|a_k| < \varepsilon$

Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\exists n_{\frac{1}{2^k}}$ τ.ω

$\forall k \geq n_{\frac{1}{2^k}}$, $|a_k| < \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow \left| a_{n_{\frac{1}{2^k}}} \right| < \frac{1}{2^k}$ $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \in \mathbb{N}$ τω

$n_{\frac{1}{2^k}} = n_k$

$|a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$

$\sum \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει $\xrightarrow{\text{Κρ. Σύγκρισης}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ συγκλίνει (απολύτως)

ΑΣΚΗΣΗ 5 $\{a_k\}$ $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Νδο $\forall$ υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_k\}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ συγκλίνει

$S_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$t_m = \alpha_{n_1} + \alpha_{n_2} + \dots + \alpha_{n_m}$

Επειδή η $\sum \alpha_k$ συγκλίνει και επειδή έχω σειρά θετικών όρων $\alpha_k \geq 0$ $\forall n \Rightarrow$ $\Rightarrow$ και $0 \leq \alpha_k$ $\Rightarrow$ $\exists M > 0$ τω $S_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$t_m \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_m} = S_{n_m} \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\xrightarrow{\alpha_m \geq 0 \ \forall n}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k}$ συγκλίνει

(*) Αν δεν υποθέσουμε ότι $\alpha_k \geq 0$ δεν ισχύει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ $\quad \alpha_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ συγκλίνει

Αλλά, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}$ αποκλίνει

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = -\infty$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$ $\quad$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\alpha)^t (k+b)^s}$

και οι δύο συγκλίνουν από κριτήριο Leibniz

Απόλυτη σύγκλιση (i) $\sum_{k=2} \frac{1}{k \ln k}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2}$$ αποκλίνει

Δεν συγκλίνει απόλυτα

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^t (k+b)^s}$

$$\frac{\frac{1}{(k+\alpha)^t (k+b)^s}}{\frac{1}{k^{s+t}}} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \xrightarrow[\text{σύγκρισης}]{\text{ορ κριτ.}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^l (k+b)^s} \quad \text{αποκλίνει}$$

αν-αν $l+s>1$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν-αν $l+s>1$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}$ συγκλίνουν

Ν δο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Ισχύει το αντίστροφο;

$\downarrow$ δεν ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k}+a_{2k+1})$$

$\downarrow$ συγκλίνει

π.χ $\sum_{k=1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

ΑΣΚΗΣΗ 8 $\quad a_k \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$

Όχι με την ρίζα δεν συγκλίνει

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (Αντί για ρίζα με τετράγωνο ισχύει αφού $\sum a_k$, $\sum b_k$ συγκλίνουν $\sum a_k b_k$ συγκλίνει $a_k = b_k$)

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = a_k$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{k}|x| \xrightarrow{k \to \infty} |x|$$

- Αν $|x|<1$, συγκλίνει απολύτως
- Αν $|x|>1$, τότε αποκλίνει
- Αν $x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει
- Α $x=-1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει. Άρα, συγκλίνει αν $x \in [-1,1)$